



## TEMA 1 LÓGICA DE ENUNCIADOS

### Tema 1 Lógica de enunciados

1. La lógica de enunciados y su lenguaje
2. Verdad y falsedad: alternativa y complemento de la deducción natural
3. Deducción natural
4. El álgebra de enunciados
5. Resolución

### 1. LA LÓGICA DE ENUNCIADOS Y SU LENGUAJE

El objeto de estudio de la lógica son los razonamientos. Un **razonamiento** es una secuencia de frases formuladas de tal manera que, de la aceptación de las primeras, parece desprenderse (la aceptación de) la última. Los razonamientos o argumentos tienen una estructura parecida a Frase 1,..., Frase n, por tanto, Frase n+1.

Las n primeras frases de un razonamiento, es decir, todas las que preceden a la última, se denominan **premisas**. La última se denomina **conclusión**.

La lógica se interesa por los procesos que a partir de premisas permiten llegar a conclusiones correctas, que validamos como legítimas.

Para ello es necesario un **lenguaje formal** o **simbólico**. Es decir el lenguaje natural no es la herramienta adecuada para expresar el estudio de la lógica y por ello recurrimos al **lenguaje de enunciados**.

Los elementos básicos de este lenguaje de enunciados son los átomos y los conectivos. Los **átomos** son las unidades más simples de este lenguaje, es decir, un átomo es la formalización de una frase declarativa que no se puede descomponer en otras más simples. Por ejemplo, en la frase: "Cuando es fiesta y los comercios están autorizados a abrir, entonces las ventas son abundantes si no llueve". Destacan 4 átomos:

- P: Es fiesta
- Q: Los comercios están autorizados a abrir
- R: Las ventas son abundantes
- S: Llueve

Se suelen nombrar los átomos con letras latinas a partir de la P, pero luego podemos nombrarlas con la letra que queramos si nos recuerda la frase original, por ejemplo la primera "es fiesta" podíamos perfectamente haberla nombrado como F.

Los **conectivos** son los operadores que permiten construcciones del lenguaje más complejas a partir de construcciones más simples. Estos conectivos habituales son:

Símbolo	Nombre	Significado	Correspondencia
$\wedge$	Conjunción	Y	Y, pero
$\vee$	Disyunción	O	O (no exclusiva)
$\neg$	Negación	No	No, nunca, ni
$\rightarrow$	Implicación o condicional	Si... entonces cuando...entonces	Si..entonces Cuando...entonces

### Prioridad de conectivos

- Máxima prioridad:  $\neg$   
 Media prioridad:  $\vee$   $\wedge$   
 Mínima prioridad:  $\rightarrow$

Siempre que no se indique lo contrario, se considera que las disyunciones del lenguaje natural tiene un significado no exclusivo. Estos conectivos tienen un orden de prioridad de izquierda a derecha y tal y como se puede observar en la figura lateral.

Por ejemplo, la frase del ejemplo anterior, se formalizaría:

$$P \wedge Q \rightarrow (\neg S \rightarrow R)$$

**Formalizar** significa hacer traducciones del lenguaje natural al lenguaje propio de la lógica, en este caso, el lenguaje de enunciados, y es lo que hemos hecho con el ejemplo anterior. Para hacerlo correctamente debemos seguir los siguientes pasos:

- Descubrir las frases declarativas simples (átomos) que constituyen el texto y asignar un símbolo de átomo a cada una.
- Detectar los conectivos del lenguaje natural (algunos conectivos pueden estar implícitos) y reproducir la estructura del texto utilizando los átomos previamente asignados.
- Sustituir los conectivos del lenguaje natural, tanto las explícitas como las implícitas, por conectivos del lenguaje de enunciados.

## 2. VERDAD Y FALSEDAD: ALTERNATIVA Y COMPLEMENTO DE LA DEDUCCIÓN NATURAL

La lógica, como ciencia formal que es, no se ocupa del significado de los átomos ni de los enunciados que se construyen a partir de los mismos, porque si lo hiciera invadiría el campo de las ciencias empíricas; lo que si hace es garantizar un razonamiento correcto, siempre que las premisas sean verdaderas, la conclusión también lo será. Concretamente la lógica asume que cualquier enunciado atómico puede ser verdadero (V) o falso (F) pero no ambas cosas simultáneamente.

La forma en la que el valor de la verdad de un enunciado compuesto depende del valor de verdad de los subenunciados que lo componen se resume en las denominadas **tablas de verdad**:

Tablas de verdad	Conjunción	Disyunción	Implicación	Negación	
A B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	A	$\neg A$
V V	V	V	V	V	F
V F	F	V	F	F	V
F V	F	V	V		
F F	F	F	V		

En función del valor de verdad de un enunciado tenemos:

- **Tautología:** Cuando el valor de verdad de un enunciado es V en todas las interpretaciones (teorema).
- **Antinomia:** Cuando el valor de verdad es F en todas las interpretaciones (contradicción).
- **Contingente:** Cuando el valor de verdad de un enunciado es V en algunas interpretaciones y F en otras.

Las tablas de verdad proporcionan una manera de validar razonamientos alternativa a la deducción natural que veremos posteriormente. Un razonamiento es correcto si y sólo si todas aquellas interpretaciones que hacen verdaderas las premisas (todas simultáneamente) también hacen verdadera la conclusión.

## 3. LA DEDUCCIÓN NATURAL

En este apartado vamos a aprender como **validar un razonamiento**, que significa demostrar que el paso de las premisas a la conclusión es legítimo; es decir, que el paso de las premisas a la conclusión se puede hacer siguiendo una serie de reglas previamente aceptadas, que se denominan **reglas de inferencia**.

### El valor de la verdad

Conjunción ( $\wedge$ ) es verdadero solo cuando lo es el de ambos conjuntados.

Disyunción ( $\vee$ ) es verdadero cuando lo es cualquiera de los conjuntados

Implicación ( $\rightarrow$ ) solo es falso en el caso de que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso.

Negación ( $\neg$ ) es verdadero cuando el enunciado es falso, y falso cuando el enunciado es verdadero.

Cuando un conjunto de premisas deben validar un razonamiento, pero todavía no lo han hecho, contamos con una conclusión putativa, y se indica por el símbolo  $\therefore$  (Son los 3 puntos vértice de un triángulo equilátero); y cuando el razonamiento ya es válido se puede cambiar el símbolo por  $\vdash$ .

**Reglas:**

Notación	Regla	Descripción	Ejemplo
<b>I <math>\wedge</math></b>	Introducción de la conjunción	Si en la lista de enunciados aparecen un enunciado A y un enunciado B (no necesariamente consecutivos), entonces se puede escribir al final de la lista, el enunciado $A \wedge B$ , o el enunciado $B \wedge A$	(1) P (2) RV Q (3) $\neg S$ (4) $P \wedge \neg S$ I $\wedge$ 1,3
<b>E <math>\wedge</math></b>	Eliminación de la conjunción	Si en una deducción aparece una conjunción, entonces es lícito escribir al final de la lista cualquier de los conjuntados; si aparece $A \wedge B$ , podemos escribir indistintamente A o indistintamente B	(1) P (2) $RA \wedge Q$ (3) R (4) Q    E $\wedge$ 2 E $\wedge$ 2
<b>I <math>\vee</math></b>	Introducción de la disyunción	Si en la lista de enunciados aparece un enunciado A, es legítimo escribir al final de la lista $A \vee B$ , o $B \vee A$ ; donde B es un enunciado cualquiera que no es necesario que aparezca previamente en la lista	(1) P (2) RV Q (3) $\neg S$ (4) $P \vee Q$ I $\vee$ 1
<b>E <math>\rightarrow</math></b>	Eliminación de la implicación (o modus ponens)	Si en algún punto de una deducción aparece una implicación y en algún otro aparece el antecedente de ésta, entonces es legítimo escribir el consecuente al final de la lista.	(1) T (2) $T \rightarrow Q$ (3) $\neg S$ (4) Q    E $\rightarrow$ 1,2
<b>I <math>\rightarrow</math></b>	Introducción de la implicación	Para poder escribir $A \rightarrow B$ , hay que abrir una subdeducción encabezada por A (hipótesis) y continuar, en el ámbito de la subdeducción, hasta llegar al enunciado B. Cuando en la subdeducción se llega a B, entonces $A \rightarrow B$ ya se puede escribir, pero ahora fuera del ámbito de la subdeducción.	(1) Q (2) P (3)   S            H  ----- (4)   $P \wedge Q$ I $\wedge$ 2,1 (5)   $(P \wedge Q) \vee T$ I $\vee$ 4 (6) $S \rightarrow (P \wedge Q) \vee T$ I $\rightarrow$ 3,5
<b>I <math>\neg</math></b>	Introducción de la negación o reducción al absurdo	Para escribir la negación de un enunciado se abre una subdeducción encabezada por éste y se obtiene, dentro de la subdeducción, una pareja formada por un enunciado y su negación. Una vez obtenida esta pareja, la negación del enunciado que encabezaba la subdeducción se puede escribir fuera del ámbito de ésta.	(1) $P \rightarrow Q$ ... (5)   P            H  ----- (6)   $\neg S$ E $\wedge$ 3 ... (11) $\neg P$ I $\neg$ 5,6,10
<b>E <math>\neg</math></b>	Eliminación de la negación	Dos negaciones consecutivas se anulan mutuamente	(1) $P \rightarrow Q$ ... (8) $\neg \neg P$ E $\rightarrow$ 2,5 (9) P            E $\neg$ 8
<b>E <math>\vee</math></b>	Eliminación de la disyunción o prueba por casos	Para poder eliminar una disyunción es necesario que una subdeducción encabezada por el primero de los disyuntivos acabe con enunciado y que otra subdeducción encabezada por el segundo disyuntivo acabe con el mismo enunciado. Cuando se verifican estas condiciones, el enunciado que es común a ambas subdeducciones puede escribirse al final de la lista, fuera del ámbito de las subdeducciones encabezadas por los disyuntivos	(1) $P \vee Q$ (2) $Q \rightarrow T$ (3) $P \rightarrow S \wedge T$ (4)   P            H  ----- (5)   $S \wedge T$ E $\rightarrow$ 3,4 (6)   T            E $\wedge$ 5 (7)   Q            H  ----- (8)   T            E $\rightarrow$ 2,7 (9) T            E $\vee$ 1,6,8
<b>it</b>	Iteración	Cualquier enunciado que aparece en una deducción puede volver a ser escrito al final de la lista de enunciados, siempre que la repetición se produzca en el mismo ámbito en el que aparece el enunciado o en el de una subdeducción interna a éste	

**Ejemplo de deducción**

(1) $P \rightarrow Q$	...
(2) $P \rightarrow (Q \rightarrow T)$	...
(3) $R \wedge \neg S$	...
(4) $T \rightarrow S$	...
(5)   P	H
(6)   $\neg S$	E $\wedge$ 3
(7)   Q	E $\rightarrow$ 1,5
(8)   $Q \rightarrow T$	E $\rightarrow$ 2,5
(9)   T	E $\rightarrow$ 7,8
(10)   S	E $\rightarrow$ 4,9
(11) $\neg P$	I $\neg$ 5,6,10
<hr/>	
A $\rightarrow$ B	

Como todo lenguaje, se requiere una **notación** característica para poder validar los razonamientos y que no nos lleven a conclusión. En primer lugar toda deducción se caracteriza por tener 3 columnas. En la primera se pone la numeración de las premisas (1 a 4) y luego las deducciones que obtenemos aplicando las reglas (5 a 11). En la segunda columna escribimos las premisas y deducciones a las que vamos llegando y en la tercera escribimos o puntos suspensivos (si se trata de las premisas o comentarios a las mismas) o el tipo de regla aplicada para obtener el siguiente enunciado, por ejemplo en la fila 6, se ha aplicado la regla EA a partir de la línea 3 (regla denominada de eliminación de la conjunción).

Las **subdeducciones** sirven para introducir en las deducciones enunciados que no están en la lista y que no se pueden obtener mediante la aplicación de ninguna regla; en este caso aplicamos una sangría y una línea vertical que respetaremos hasta que se acabe la subdeducción (en el caso del ejemplo de 5 a 10).

### Consejos prácticos

Aunque el conjunto de reglas y normas parezca complicada no lo es tanto, a partir de aquí una serie de consejos para guiarnos en el proceso de construir demostraciones:

1. El proceso de demostración tiene un único objetivo que es obtener la conclusión de un razonamiento. Por tanto, aunque puedan aplicarse muchas reglas, intentaremos solo aplicar las que nos ayuden a alcanzar este objetivo.
2. La forma de la conclusión dicta las reglas que hay que aplicar. Así podremos proceder:
  - Si la conclusión es una implicación: abriremos una subdeducción encabezada por el antecedente e intentaremos obtener el consecuente.
  - Si la conclusión es una conjunción, intentaremos obtener cada uno de los conjuntados por separado.
  - Si la conclusión es una disyunción, intentaremos obtener alguno de los disyuntados.
  - Si la conclusión es la negación de un enunciado, abriremos una subdeducción encabezada por ese enunciado e intentaremos llegar a una contradicción.
3. La aplicación de lo anterior, implica la estrategia de dividir y vencer. Casi cualquier problema de una cierta medida se puede atacar con esta estrategia. Los subproblemas, además, también los podremos dividir en más subproblemas.
4. A veces también la forma de las premisas guiará el proceso de demostración:
  - Si aparecen implicaciones, podemos intentar aplicar la regla de eliminación de la implicación.
  - Si en las premisas aparecen disyunciones puede ser pertinente que se plantee el problema como una prueba por casos, aplicando la regla de eliminación de la disyunción.

### Reglas derivadas

Una regla derivada es una regla que puede demostrarse a partir de las reglas básicas o/y otras reglas derivadas previamente demostradas. Se pueden considerar como los subprogramas de la deducción natural: una secuencia de pasos se agrupa bajo la forma de una regla.

Estas reglas derivadas se pueden utilizar en cualquier deducción. Así muchas demostraciones tendrán una medida bastante más pequeña y esto las hará más legibles. Cualquier demostración en la que se hayan utilizado reglas derivadas pueden volverse a escribir sin la utilización de estas reglas: solo hay que sustituir cada línea en la que se ha utilizado una regla derivada por su demostración.

Notación	Regla	Ejemplo
<b>SH</b>	Regla del silogismo hipotético	$A \rightarrow B$ $B \rightarrow C$ $A \rightarrow C$
<b>QS</b>	Regla del quodlibet sequitur (De una contradicción se sigue cualquier cosa)	$A$ $\neg A$ $B$
<b>SD</b>	Regla del silogismo disyuntivo	$A \vee B$ $\neg A$ $B$
<b>MT</b>	Regla del modus tollens	$A \rightarrow B$ $\neg B$ $\neg A$
<b>Res</b>	Regla de resolución	$\neg A \vee B$ $A \vee C$ $B \vee C$

### Equivalencias deductivas

#### Equivalentes deductivos

$\neg\neg A \vdash A$
$A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow \neg A$
$A \rightarrow B \vdash \neg \neg AVB$
$A \rightarrow B \vdash \neg(AV\neg B)$
$\neg(AVB) \vdash \neg A \wedge \neg B$ Leyes de
$\neg(A\wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B$ Morgan
$A\wedge B \rightarrow C \vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$

Cuando ocurre que  $A \vdash B$  y  $B \vdash A$ , se dice que A y B son equivalentes deductivos, este hecho se nota por:  $A \vdash \vdash B$

Los equivalentes deductivos permiten, en algunas ocasiones, simplificar una demostración gracias al **principio de sustitución**: en una deducción, cualquier enunciado se puede sustituir por un equivalente deductivo suyo.

La equivalencia deductiva  $\vdash \vdash$  puede entenderse como la igualdad = de los enunciados. Esta forma de concebirla permite sustituir cualquier subenunciado por un equivalente deductivo del primero.

### Teoremas

Hasta este momento hemos visto numerosos ejemplos de demostraciones. Ahora bien, en ningún caso se ha planteado el hecho de tener que demostrar un enunciado sin la **necesidad de ninguna premisa**. Hasta cierto punto podría parecer razonable pensar que esto no es posible, lo cual no sería cierto, puesto que ya existen infinitos enunciados que pueden ser demostrados sin la necesidad de ninguna premisa, son los **teoremas**.

#### Teoremas: Principios aristotélicos

$\vdash A \rightarrow A$
$\vdash \neg(A \wedge \neg A)$
$\vdash AV\neg A$

Cuando un enunciado necesita **cero premisas** para ser demostrado decimos que es un **teorema**. Por tanto, es una conclusión incondicional, para indicar que C es un teorema, se utiliza la notación:  $\vdash C$ .

Los teoremas presentan las siguientes **propiedades**:

- Un teorema puede ser introducido en cualquier línea de una deducción, porque no necesita premisas para ser demostrado (se nota con TE).
- Como consecuencia del punto anterior, todos los teoremas son equivalentes deductivos entre sí.
- De la negación de cualquier teorema, se desprende una contradicción.

## 4. EL ÁLGEBRA DE ENUNCIADOS

#### Leyes del álgebra de Boole

Idempotencia	a. $A \wedge A = A$ b. $A \vee A = A$
Conmutatividad	a. $A \wedge B = B \wedge A$ b. $A \vee B = B \vee A$
Asociatividad	a. $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$ b. $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$
Absorción	a. $A \wedge (B \vee A) = A$ b. $A \vee (B \wedge A) = A$
Distributividad	a. $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ b. $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
Ley del ínfimo	a. $A \wedge \square = \square$ b. $A \vee \square = A$
Ley del supremo	a. $A \wedge \blacksquare = A$ b. $A \vee \blacksquare = \blacksquare$
Complementariedad	a. $A \wedge \neg A = \square$ b. $A \vee \neg A = \blacksquare$

El **álgebra de Boole** es un conjunto en que hay definidas dos operaciones (que en el caso de los enunciados son  $\wedge$  y  $\vee$ ) y donde se cumplen unas determinadas propiedades. Las leyes del Álgebra de Boole se encuentran expuestas en la tabla lateral y hemos de percibir que la visión algebraica de los enunciados deja de lado la conectiva  $\rightarrow$ . Solo prevé  $A \rightarrow B$  como una forma alternativa de escribir  $\neg AvB$ .

Las **formas generales** son los representantes canónicos de cada enunciado, y pueden ser de dos tipos:

- **Forma normal conjuntiva (FNC)**: tiene la forma de una conjunción de disyunciones, es decir:  $(\dots \vee \dots \vee \dots) \wedge (\dots \vee \dots \vee \dots) \wedge (\dots \vee \dots \vee \dots)$
- **Forma normal disyuntiva (FND)**: Tiene la forma de una disyunción de conjunciones:  $(\dots \wedge \dots \wedge \dots) \vee (\dots \wedge \dots \wedge \dots) \vee (\dots \wedge \dots \wedge \dots)$

Para conseguir encontrar la FNC de cualquier enunciado que nos propongan, seguiremos los siguientes pasos:

- Eliminar todas las apariciones de la conectiva  $\rightarrow$ , sustituyéndola por  $\neg AvB$ .

- Interiorizar todas las negaciones para que afecten solo a los átomos.
- Simplificar las posibles dobles negaciones, sustituyendo  $\neg\neg A$  por  $A$ .
- Aplicar la distributividad para que las conjunciones queden fuera de los paréntesis y las disyunciones dentro.
- Simplificar el resultado si procede, utilizando la idempotencia, complementariedad y ley del supremo.

Para encontrar la FND, seguimos los mismos pasos pero en lugar de aplicar la distributividad de las conjunciones en el paso 4, aplicaremos la distributividad de las disyunciones.

## 5. RESOLUCIÓN

El Método de resolución, utiliza una única regla, la **regla de resolución**, que podemos observar en la imagen lateral y que afirma que si se tiene una disyunción que contiene un enunciado  $A$  y también se tiene otra disyunción que contiene la negación de este enunciado  $A$ , entonces es lícito obtener una disyunción que contiene todos los disyuntados de las dos anteriores, excepto la pareja  $A$  y la negación de  $A$  porque se aniquilan mutuamente.

### Regla de la resolución

$$\begin{array}{c} A \vee B \\ \neg A \vee C \\ \hline B \vee C \end{array}$$

Llevamos entonces una única estrategia la **reducción al absurdo**; para demostrar que de unas premisas se desprende una conclusión, la reducción al absurdo prueba que de las mismas premisas y la negación de la conclusión se desprende una contradicción. Si la contradicción se encuentra, el razonamiento es correcto, si la contradicción no se encuentra, entonces no es correcto.

Tendremos en cuenta los siguientes casos:

$\begin{array}{c} A \\ \neg A \\ \hline \square \end{array}$	$\begin{array}{c} A \vee B \\ \neg A \vee \neg B \\ \hline \blacksquare \end{array}$
Perfecto: es la contradicción que estamos buscando	Mal: Es un teorema, que no nos sirve para nada

Como el método de resolución solo se aplica a disyunciones debemos construir la FNC de todas las premisas y de la **negación** de la conclusión. Lo llevaremos a cabo a través de la resolución lineal. Iremos tomando cláusulas hasta llegar a  $\square$ ; Pueden ocurrir dos cosas que hacen que no podamos seguir adelante y que hacen que tengamos que cambiar el orden de las cláusulas elegidas:

- La aparición de  $\blacksquare$  como cláusula troncal.
- La repetición de una cláusula aparecida previamente en el mismo árbol.

La **estrategia del conjunto de apoyo** consiste en resolver eligiendo preferentemente las cláusulas de la negación de la conclusión. ¿Por qué? Porque presuponemos que las premisas del razonamiento que se quiere validar son consistentes, de tal manera que lo que provoca la inconsistencia es la inclusión de la negación de la conclusión; así podemos acelerar la detección de inconsistencias y resolverlo linealmente con el menor número de pasos posibles.

**TEMA 2 LÓGICA DE PREDICADOS**

**Tema 2**  
Lógica de predicados

1. La lógica de predicados y su lenguaje
2. Verdad y falsedad en la lógica de predicados
3. Deducción natural
4. Formas normales
5. Resolución

**Ejemplos de predicados**

P(x): x es una persona  
 Q(x): x es de color rojo  
 P(x,y): x come y  
 P(x,y,z): x saluda a y en la calle z

**1. LA LÓGICA DE ENUNCIADOS Y SU LENGUAJE**

La capacidad expresiva del lenguaje de enunciados es bastante limitada, lo que hace que un gran número de razonamientos que se pueden expresar utilizando el lenguaje natural, no se puedan luego validar utilizando las herramientas de la lógica de enunciados. Por ello la **lógica de predicados** cuenta con un lenguaje formal más rico, expresivo y con un conjunto de reglas que permiten validar razonamientos expresados en este lenguaje. La lógica de enunciados debe entenderse como un subconjunto de la lógica de predicados.

Un **predicado** es una aplicación definida en un dominio que adquiere valores en el conjunto de enunciados. Formalmente se expresa  $P(x):D \rightarrow$  enunciado. Normalmente representamos un predicado utilizando una letra mayúscula del alfabeto latino, con los parámetros (también llamados variables) representados por letras minúsculas a partir de la x, entre paréntesis y separados por comas. En la tabla lateral podemos observar algunos ejemplos.

Los predicados pueden tener 0 variables (enunciados), una variable (predicados unarios), 2 variables (binarios), etc.

Una **constante** es la representación de un elemento de un dominio. Por ejemplo P(x) es x es una persona, pero siendo Juan una variable P(Juan) significa que Juan es una persona. Normalmente las constantes se implementan por letras del alfabeto empezando por la a; así P(x) es un predicado pero no un enunciado, P(a) sí es ya un enunciado.

**Cuantificadores**

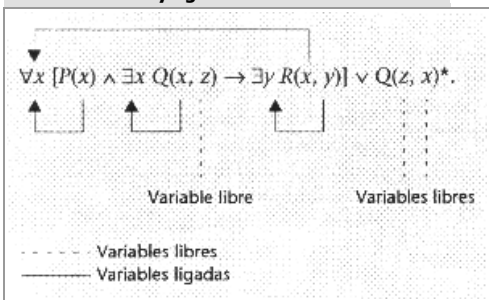
$\forall$ Para todo
$\forall x P(x)$ : Todos son estudiantes
$\exists$ Hay un.... Algún algunos...
$\exists x P(x)$ Hay estudiantes... algunos son estudiantes...

Los **cuantificadores** son los operadores que el lenguaje de la lógica de predicados añade a los conectivos, únicamente tenemos que añadir a los que ya conocíamos de la lógica de enunciados dos, que podemos observar en la tabla lateral.

El lenguaje de lógica de predicados se denomina **lenguaje de fórmulas** y las **reglas** para construir correctamente estas fórmulas son:

1. Si P es un símbolo de predicado y  $t_1, t_2, \dots, t_n$  son símbolos de términos, entonces  $P(t_1, \dots, t_n)$  es una fórmula. Éste tipo de fórmulas se denominan atómicas
2. Si B y A son fórmulas entonces  $(\neg A)$ ,  $(A \wedge B)$ ,  $(A \vee B)$ ,  $(A \rightarrow B)$ , también son fórmulas
3. Si A es una fórmula y x es una variables, entonces  $(\forall x A)$  y  $(\exists x A)$  también son fórmulas
4. No hay más fórmulas que las expuestas arriba.

**Variables libres y ligadas**



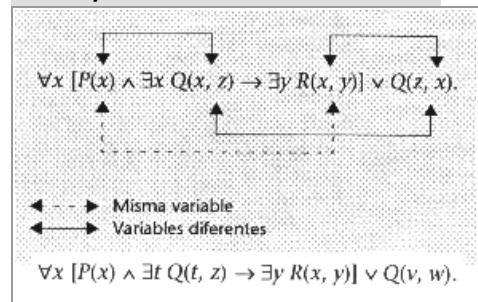
Se denomina **ámbito de un cuantificador** a aquella zona de una fórmula que está dentro de su campo de acción, es decir bajo sus efectos. Dentro de sus efectos quedan las **variables ligadas** y fuera ellos las **variables libres**. Además, las fórmulas sin ninguna variable libre se denominan **fórmulas cerradas** y las que tienen alguna libre se denominan **fórmulas abiertas**.

Cuando dos o más variables con la misma letra estén bajo el alcance del mismo cuantificador, se trata de la misma variable. En cambio, cuando no estén bajo el alcance del mismo cuantificador, aunque tengan la misma letra no son la misma variable (ejemplo en

tabla lateral). No obstante para evitar confusiones innecesarias es mejor dar nombres diferentes a las variables diferentes. Así en el ejemplo de la tabla lateral, la forma más correcta de escribirlo es la que viene más abajo en la misma tabla.

La **formalización de razonamientos** que utiliza el lenguaje de fórmulas es una actividad muy parecida a la que se realiza cuando se utiliza el lenguaje de enunciados, pero habrá que poner atención a la detección de predicados, número de variables de cada predicado y a los cuantificadores. Los **patrones habituales** son los siguientes:

Mismas y distintas variables



Formalización	Patrón	Otras adaptaciones
$\forall x A(x)$	Todo es A	Todo el mundo/todo tiene A Todo el mundo/todo hace A
$\exists x A(x)$	Algunos son A	Alguien/algunos tienen A Alguien/algunos hacen A
$\forall x [A(x) \rightarrow B(x)]$	Todos los A son B	A todo x le pasa que, si es A, también es B Sea quien sea x, si es A, es B
$\exists x [A(x) \wedge B(x)]$	Algunos A son B	
$\forall x A(x) \rightarrow C$	Cuando todo el mundo es A, entonces pasa C	
$\exists x A(x) \rightarrow C$	Cuando alguien es A, entonces pasa C	

## 2. VERDAD Y FALSEDAD EN LA LÓGICA DE PREDICADOS

Todo lo explicado anteriormente para la verdad y falsedad en la lógica de enunciados es aplicable a la lógica de predicados; no obstante, una fórmula es algo más complejo que un enunciado y debemos, por tanto hacer una **interpretación** de las mismas. Una interpretación es un triplete de la forma  $\langle D, I_p, I_c \rangle$ , donde:

- D es el dominio de las variables que no puede estar vacío.
- $I_p$ : Para cada símbolo de predicado (V o F) hay que hacer todas las posibles sustituciones de sus parámetros por elementos del dominio.
- $I_c$ : Para cada símbolo de constante hay que hacer una asignación de un elemento concreto del dominio.

Por ejemplo, considerando la fórmula  $\forall x \exists y P(x, y)$  y dado el dominio  $D = \{1, 2\}$ , todas las posibles sustituciones nos dan las siguientes interpretaciones:  
 $P(1, 1) = V$ ,  $P(1, 2) = F$ ,  $P(2, 1) = V$  y  $P(2, 2) = F$ .

Evidentemente esto nos pone en una terrible desventaja respecto a la lógica de enunciados y es que en ésta cuando un enunciado tienen n átomos, existen exactamente  $2^n$  interpretaciones. Ahora si el dominio es infinito, existen interpretaciones infinitas.

Para **pasar de fórmulas a enunciados** debemos tener en cuenta que:

- Toda fórmula del tipo  $\forall x P(x)$ , es equivalente a  $P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(n)$ .
- Toda fórmula del tipo  $\exists x P(x)$ , es equivalente a  $P(1) \vee P(2) \vee \dots \vee P(n)$ .

De forma análoga a lo que sucedía en lógica de enunciados, una **tautología** (teorema) se da cuando su valor es cierto en todas las interpretaciones. Cuando en



todas ellas es falso tenemos una **antinomia** (contradicción). Cuando una fórmula ni es tautología ni antinomia se dice que es **contingente**.

Para **refutar razonamientos** hay que tener en cuenta que es correcto el razonamiento si, y solo si, todas aquellas interpretaciones que hacen verdaderas las premisas, también hacen verdadera la conclusión. Evidentemente la infinidad en el número de interpretaciones no permite validar un razonamiento por la vía de comprobar que todas las interpretaciones que hacen verdaderas las premisas también hacen verdadera la conclusión. Pero lo que sí podemos demostrar es que un razonamiento es **formalmente inválido** y esto sucede cuando existe al menos una interpretación que hace verdaderas las premisas y falsa la conclusión.

Normalmente para **buscar un contraejemplo** que invalide un razonamiento comenzaremos por el menor dominio posible buscando premisas verdaderas y conclusión falsa. De no encontrarlo repetimos el proceso añadiendo cada vez un elemento más al dominio y finalizaremos cuando encontremos un contraejemplo. Evidentemente si el razonamiento es correcto, este proceso de prolongará infinitamente; por ello reservaremos esta búsqueda de contraejemplos para razonamientos que se saben inválidos o de los que se tienen fuertes sospechas.

### 3. LA DEDUCCIÓN NATURAL

#### Reglas

La deducción natural de la lógica de predicados mantiene las nueve reglas de la lógica de enunciados y añade 4 más:

Notación	Regla	Descripción	Ejemplo
<b>E</b> $\forall$	Eliminación del Cuantificador universal	Cuando una fórmula está cuantificada universalmente, la variable cuantificada puede ser sustituida por cualquier término y el cuantificador se puede eliminar (en el ejemplo t es un término cualquiera, es decir una constante o una variable)	(1) $\forall xA(x)$ (2) ... (3) $A(t)$ <b>E</b> $\forall$ 1
<b>I</b> $\exists$	Introducción del Cuantificador existencial	Todo enunciado puede ser sustituido por un cuantificador existencial	(1) $A(t)$ (2) ... (3) $\exists xA(x)$ <b>I</b> $\exists$ 1
<b>E</b> $\exists$	Eliminación del Cuantificador existencial	Para eliminar un cuantificador existencial basta con sustituir la variable afectada por este cuantificador por una constante nueva. Es necesario que la constante a no se haya utilizado previamente.	(1) $\exists xA(x)$ (2) $A(a)$ <b>E</b> $\exists$ 1
<b>I</b> $\forall$	Introducción del Cuantificador universal	Cuando en una fórmula aparece una variable libre, esta variable se puede cuantificar universalmente. Para ello es necesario que la variable sea arbitraria, que no aparezca en ninguna subdemostración.	(1) $A(u)$ (2) $\forall xA(x)$ <b>I</b> $\forall$ 1

#### Reglas derivadas y equivalencias deductivas

La deducción natural es más compleja en lenguaje de predicados que en enunciados y la posibilidad de cometer errores también es mayor; para evitarlo es conveniente usar siempre que sea posible, reglas derivadas y equivalencias deductivas de corrección probada. Destacamos las siguientes:

Regla	Notación
Cambio de nombre de la variable cuantificada	$\forall xA(x) \dashv\vdash \forall yA(y)$
	$\exists xA(x) \dashv\vdash \exists yA(y)$
Paso del cuantificador universal al existencial	$\forall xA(x)$ pasamos a $\exists xA(x)$
Conmutatividad de los cuantificadores	$\forall x\forall yA(x,y) \dashv\vdash \forall y\forall xA(x,y)$
	$\exists x\exists yA(x,y) \dashv\vdash \exists y\exists xA(x,y)$
Relación de los cuantificadores con la negación Leyes de Morgan	$\neg\forall xA(x) \dashv\vdash \exists x\neg A(x)$
	$\neg\exists xA(x) \dashv\vdash \forall x\neg A(x)$
Relación de los cuantificadores con la conjunción	$\forall xA(x) \wedge \forall yB(y) \dashv\vdash \forall z[A(z) \wedge B(z)]$
	$\exists z[A(z) \wedge B(z)]$ pasamos a $\exists xA(x) \wedge \exists yB(y)$
Relación de los cuantificadores con la disyunción	$\exists xA(x) \vee \exists yB(y) \dashv\vdash \exists z[A(z) \vee B(z)]$
	$\forall xA(x) \vee \forall yB(y)$ pasamos a $\forall z[A(z) \vee B(z)]$
Relación de los cuantificadores con la implicación	$\forall z[A(z) \rightarrow B(z)]$ pasamos a $\forall xA(x) \rightarrow \forall yB(y)$
	$\exists xA(x) \rightarrow \exists yB(y)$ pasamos a $\exists z[A(z) \rightarrow B(z)]$

#### 4. FORMAS NORMALES

Las fórmulas, al igual que los enunciados, se manipulan algebraicamente para obtener fórmulas equivalentes. La fórmula normal de una fórmula del lenguaje de predicados recibe el nombre de **forma normal prenexa**, y está expresada con un prefijo (donde se “albergan” todos los cuantificadores) y una matriz (donde no hay cuantificadores).

La **forma normal de Skolem** (FNS) es la que se utiliza para poder aplicar, posteriormente, el método de resolución. Es una forma normal prenexa, con la matriz normalizada (FNC) y con un prefijo que solo contiene cuantificadores universales, los existenciales se eliminan siguiendo un proceso denominado **eskolemización**. Para encontrar esta forma de Skolem se siguen los pasos:

- Verificar que **no existen variables libres**. Si existieran es síntoma de error en la formalización y es necesaria repasarla. Si existían variables libres éstas se deben cuantificar existencialmente.
- Verificar que cada **variable tiene un nombre diferente**. Si se utiliza el mismo nombre para variables dentro del ámbito de cuantificadores diferentes, es necesario cambiar estos nombres.
- **Eliminar todas las apariciones de la conectiva  $\rightarrow$**  Recordemos que  $A \rightarrow B \dashv\vdash \neg A \vee B$
- Aplicar las **Leyes de Morgan** para conseguir que las negaciones precedan a los símbolos de predicado.
- **Eliminar los cuantificadores existenciales** (Skolemización).
  - Si un cuantificador existencial no se encuentra dentro del ámbito de ningún cuantificador universal, entonces hay que sustituir la variable cuantificada existencialmente por una constante que todavía no haya sido utilizada y eliminar el cuantificador universal.
  - Si un cuantificador existencial se encuentra dentro del ámbito de un cuantificador universal, entonces hay que sustituir la variable cuantificada existencialmente por una función de la variable cuantificada universalmente y eliminar el cuantificador existencial.

- Si un cuantificador existencial se encuentra dentro del ámbito de más de un cuantificador universal, entonces hay que sustituir la variable cuantificada existencialmente por una función de todas las variables afectadas por estos cuantificadores universales y eliminar el cuantificador existencial.
- Mover todos los **cuantificadores a la izquierda**.
- **Normalizar la matriz**, para poder aplicar después el método de regulación (FNC).

Además, debemos seguir este orden escrupulosamente, pues alterarlo podría provocar errores.

---

## 5. RESOLUCIÓN

El método de resolución de la lógica de predicados se basa en los siguientes puntos:

- Una única regla: la de resolución.
- Una única estrategia: la reducción ab absurdo.
- La utilización de la forma normal de Skolem (Con matriz en FNC).
- La utilización de la técnica del replanteamiento de la última decisión, para garantizar la sistematicidad.
- El cálculo de sustituciones y el algoritmo de unificación.

Si nos damos cuenta, todos los puntos son los vistos anteriormente para la lógica de enunciados excepto dos: la utilización de la forma normal de Skolem (pero que viene a ser la misma utilizada en FNC para la lógica de enunciados) u quizá la verdadera diferencia sea el cálculo de sustituciones y el algoritmo de unificación.

El **cálculo de sustituciones** se utiliza para poder continuar realizando la resolución de lógica de predicados sustituyendo variables y fórmulas para adaptarnos a las formas troncales que nos van apareciendo, así tendremos en cuenta al sustituir:

- Elegir en cada momento aquella sustitución que permita eliminar el literal más a la derecha de la cláusula troncal.
- Si hay más de una sustitución posible, utilizamos cualquiera de ellas y el resto se reservará como alternativa por si hay que aplicar el replanteamiento de la última decisión.
- Solo se pueden sustituir las variables por constantes, por funciones o por otras variables. Sin embargo, ni las constantes ni las funciones pueden ser sustituidas por nada.
- Cuando se sustituye una variable, hay que sustituir todas las apariciones de esta variable en la cláusula donde aparece. No obstante, la cláusula original se dejará intacta y la sustitución de realizará sobre la copia que se utiliza en el árbol de resolución.

El **algoritmo de unificación** es un algoritmo que mecaniza las sustituciones en los casos en que la simple inspección de los literales involucrados no es suficiente para determinar las sustituciones que debemos realizar. Como resumen diremos que solo podemos superar las discrepancias de la forma variable/término o de la forma función/función.